

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИЙ НА СТРУКТУРУ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ

На характер турбулентности очень сильное влияние оказывают пульсирующие объемные силы, если они взаимосвязаны с пульсациями скорости. Самым простым примером является сильное влияние сил тяжести на течение с пульсациями плотности. Если пульсации плотности появляются в результате того, что имеется средний градиент плотности в том направлении, что и средний градиент скорости, или когда течение фактически возникает из-за разности средних плотностей, то между пульсациями плотности и скорости имеется хорошая корреляция и влияние сил плавучести может быть очень велико. В случае, когда плотность увеличивается в вертикальном направлении снизу вверх, имеем неустойчивое течение, и взаимосвязь плотности и скорости может привести к преобразованию потенциальной энергии в турбулентную кинетическую энергию. Наоборот, когда плотность уменьшается снизу вверх быстрее, чем это необходимо для сохранения гидростатического равновесия жидкости, то имеющаяся турбулентная энергия может быть преобразована в потенциальную энергию, это значит, что турбулентное перемешивание стремится уменьшить градиент плотности и таким образом повысить центр тяжести объема жидкости.

В рассматриваемой проблеме основной задачей является получение в явном виде выражения для турбулентных характеристик через средние характеристики турбулентного потока. Для описания сложных турбулентных течений, где присутствуют температура и концентрация используются дополнительные уравнения для моментов второго порядка полей

температуры и концентраций. В течениях общего вида имеются в силу симметрии шесть компонент тензора напряжений Рейнольдса $u_i u_j$ и по три компоненты корреляций вида $u_i t$ и $u_i q$, два компонента t^2 и q^2 , и уравнение для корреляции вида tq . Следовательно, требуется решить пятнадцать уравнений в частных производных. Для определения некоторых членов системы уравнения используются приближенные полуэмпирические соотношения. Рассматривая сдвиговые турбулентные течения, предполагается приближение Буссинеска, т.е. изменения плотности малы, и она учитывается только в массовых силах

$$F_{ui} = -\beta g (\delta_{3i} \overline{tu_j} + \delta_{3j} \overline{tu_i}) + \alpha g (\delta_{3i} \overline{qu_j} + \delta_{3j} \overline{qu_i}) \quad (1)$$

$$F_{ti} = g \delta_{3i} (-\beta \overline{t^2} + \alpha \overline{tq}) \quad F_{qi} = g \delta_{3i} (-\beta \overline{tq} + \alpha \overline{q^2})$$

Используя уравнения (6-10, ЛЕК-4) с учетом (1) получим следующую систему уравнений

$$\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) + \frac{2}{3} c \delta_{ij} \frac{E^{3/2}}{l}$$

$$- \beta g (\delta_{3i} \overline{tu_j} + \delta_{3j} \overline{tu_i}) + \alpha g (\delta_{3i} \overline{qu_j} + \delta_{3j} \overline{qu_i}) = 0$$

$$\overline{u_k t} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} + k_i \frac{\sqrt{E}}{l} \overline{u_i t} + g \delta_{3i} (-\beta \overline{t^2} + \alpha \overline{tq}) = 0$$

(3.7)(2)

$$\overline{u_k t} \frac{\partial T}{\partial x_k} + c_t \frac{t^2 \sqrt{E}}{l} = 0$$

$$\overline{u_k q} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial Q}{\partial x_k} + k_q \frac{\sqrt{E}}{l} \overline{u_i q} + g \delta_{3i} (-\beta t \overline{q} + \alpha \overline{q^2}) = 0$$

$$\overline{u_k q} \frac{\partial Q}{\partial x_k} + c_q \frac{q^2 \sqrt{E}}{l} = 0$$

$$\overline{u_k t} \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x_k} + \overline{u_k q} \frac{\partial T}{\partial x_k} + c_q \frac{\sqrt{E}}{l} t \overline{q} = 0$$

Решение системы в уравнении (2) относительно пульсационных характеристик, считая параметры средних течений известными, получим в следующем виде, где решение состоит из двух сомножителей. Первый, из которых соответствуют течению в однородной среде, а второй учитывает влияние архимедовых сил, вызванных полем температуры и концентрации.

$$\begin{aligned} E &= E_0 \varphi, \quad \overline{u_1^2} = (\overline{u_1^2})_0 \Omega_1, \quad \overline{u_2^2} = (\overline{u_2^2})_0 \Omega_2, \quad \overline{u_3^2} = (\overline{u_3^2})_0 \Omega_3 \\ \overline{u_1 u_3} &= (\overline{u_1 u_3})_0 \Omega_4, \quad \overline{u_2 u_3} = (\overline{u_2 u_3})_0 \Omega_5, \quad \overline{u_1 u_2} = (\overline{u_1 u_2})_0 \Omega_6 \\ \overline{t u_3} &= (\overline{t u_3})_0 \Omega_9, \quad \overline{t u_1} = (\overline{t u_1})_0 \Omega_7, \quad \overline{t u_2} = (\overline{t u_2})_0 \Omega_8, \quad \overline{t^2} = (\overline{t^2})_0 \Omega_{10}, \\ \overline{q u_3} &= (\overline{q u_3})_0 \Omega_{13}, \quad \overline{q u_1} = (\overline{q u_1})_0 \Omega_{11}, \quad \overline{q u_2} = (\overline{q u_2})_0 \Omega_{12}, \quad \overline{q^2} = (\overline{q^2})_0 \Omega_{14} \\ \overline{q t} &= (\overline{q t})_0 \Omega_{15} \end{aligned} \quad (3)$$

где выражения для однородной среды

$$\left(\overline{u_3^2}\right)_0 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{c}{k}\right) \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 \right]$$

$$\left(\overline{u_1^2}\right)_0 = \frac{2}{3} \frac{c}{k} \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left[\left(\frac{k}{c} - 1\right) \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{k}{c} + 2\right) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 \right]$$

$$\left(\overline{u_2^2}\right)_0 = \frac{2}{3} \frac{c}{k} \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left[\left(\frac{k}{c} - 1\right) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{k}{c} + 2\right) \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 \right]$$

$$\left(-\overline{u_1 u_3}\right)_0 = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_2 u_3}\right)_0 = l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_1 u_2}\right)_0 = 2 \frac{c^{1/3}}{k} l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_1 t}\right)_0 = 2 \frac{c^{1/3}}{k_t} \left(1 + \frac{k}{k_t}\right) l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_2 t}\right)_0 = 2 \frac{c^{1/3}}{k_t} \left(1 + \frac{k}{k_t}\right) l^2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_3 t}\right)_0 = \frac{k}{k_t} l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{t^2}\right)_0 = \frac{k}{k_i} \frac{c}{c_i} \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2$$

$$\left(\overline{u_1 q}\right)_0 = 2 \frac{c^{1/3}}{k_q} \left(1 + \frac{k}{k_q}\right) l^2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{u_2 q}\right)_0 = 2 \frac{c^{1/3}}{k_q} \left(1 + \frac{k}{k_q}\right) l^2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(-\overline{u_3 q}\right)_0 = \frac{k}{k_q} l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)$$

$$\left(\overline{q^2}\right)_0 = \frac{k}{k_q} \frac{c}{c_q} \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)^2$$

$$E_0 = \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)^2 \right]$$

Функций учитывающие влияние стратификации на турбулентный поток имеют следующий вид, отметим, что некоторые функции совпадают в силу симметрии исходных уравнений.

$$\Psi = \varphi^2 + \varphi \left[Rt \left(\frac{k}{c_t} + \frac{k \text{ Pr}}{c_s \text{ Sc}} + 2 \right) - Rq \left(\frac{k}{c_q} + \frac{k \text{ Sc}}{c_s \text{ Pr}} + 2 \right) \right] + Rt^2 \frac{k \text{ Pr}}{c_s \text{ Sc}} \left(\frac{k}{c_t} + 2 \right) +$$

$$+ Rq^2 \frac{\text{Sc} k}{\text{Pr} c_s} \left(2 + \frac{k}{c_q} \right) - Rt \cdot Rq \left[\frac{k k}{c_t c_q} + 2 \cdot \frac{k}{c_s} \left(\frac{c_t}{c_q} + \frac{c_q}{c_t} \right) \right]$$

$$\Omega_3 = \frac{\varphi}{\Psi} \left\{ \varphi^2 + \varphi \left[Rt \left(\frac{k}{c_t} + \frac{k \text{ Pr}}{c_s \text{ Sc}} \right) - Rq \left(\frac{k}{c_q} + \frac{k \text{ Sc}}{c_s \text{ Pr}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{c_s} \left(Rt^2 \frac{k \text{ Pr}}{c_t \text{ Sc}} + Rq^2 \frac{k \text{ Sc}}{c_q \text{ Pr}} \right) - Rt \cdot Rq \frac{k k}{c_t c_q} \right\}$$

$$\Omega_1 = \frac{\varphi}{\frac{2}{3} \left(2 + \frac{c}{k} \right) \Psi} \left\{ \frac{2}{3} \left(2 + \frac{c}{k} \right) \varphi^2 + \varphi \cdot Rt \left[\frac{2}{3} \left(2 + \frac{c}{k} \right) \cdot \left(\frac{k}{c_t} + \frac{k \text{ Pr}}{c_s \text{ Sc}} \right) + 4 \right] - \right.$$

$$\left. - \varphi \cdot Rq \left[\frac{2}{3} \left(2 + \frac{c}{k} \right) \cdot \left(\frac{k}{c_q} + \frac{k \text{ Sc}}{c_s \text{ Pr}} \right) + 4 \right] + Rt^2 \frac{k \text{ Pr}}{c_s \text{ Sc}} \left[\frac{2}{3} \left(2 + \frac{c}{k} \right) \frac{k}{c_t} + 4 \right] + \right.$$

$$\left. + Rq^2 \frac{k \text{ Sc}}{c_s \text{ Pr}} \left[\frac{2}{3} \left(2 + \frac{c}{k} \right) \frac{k}{c_q} + 4 \right] - Rt \cdot Rq \left[4 \frac{k}{c_s} \left(\frac{c_t}{c_q} + \frac{c_q}{c_t} \right) + \frac{2}{3} \left(2 + \frac{c}{k} \right) \frac{k k}{c_t c_q} \right] \right\}$$

$$\Omega_2 = \Omega_1$$

$$\Omega_4 = \frac{\varphi^{3/2}}{(\varphi + Rt - Rq)\Psi} \left\{ \varphi^2 + \varphi \left[Rt \left(\frac{k}{c_t} + \frac{k}{c_s} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} - \frac{1}{\text{Pr}} \right) - Rq \left(\frac{k}{c_q} + \frac{k}{c_s} \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} - \frac{1}{\text{Sc}} \right) \right] + \right. \\ \left. + Rt^2 \frac{k}{c_s} \frac{1}{\text{Sc}} \left(\frac{k}{c_t} - 1 \right) + Rq^2 \frac{k}{c_s} \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{k}{c_q} - 1 \right) - Rt \cdot Rq \left[\frac{k}{c_s} \left(\frac{c_t}{c_q} \frac{1}{\text{Pr}} + \frac{c_q}{c_t} \frac{1}{\text{Sc}} \right) - \frac{k}{c_t} \frac{k}{c_q} \right] \right\}$$

$$\Omega_5 = \Omega_4, \quad \Omega_6 = \frac{\Omega_4}{\sqrt{\varphi}} \quad \Omega_9 = \frac{1}{\Psi} \left\{ \varphi^{3/2} \left[\varphi + \frac{k}{c_s} \left(Rt \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} - Rq \frac{c_t}{c_q} \right) \right] \right\}$$

$$\Omega_7 = \frac{\varphi}{(\varphi + Rt - Rq)(1 + \text{Pr})\Psi} \left\{ \varphi^2 (1 + \text{Pr}) + \varphi \cdot Rt \left[\frac{k_t}{c_t} + \frac{k}{c_s} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} (1 + \text{Pr}) \right] - \right. \\ \left. - \varphi \cdot Rq \left(\frac{k_t}{c_q} + \frac{k_q}{c_s} + 1 - \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} + \frac{k}{c_s} \frac{c_t}{c_q} \right) + Rt^2 \frac{k}{c_s} \frac{k_t}{c_t} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} + Rq^2 \frac{k}{c_s} \left(\frac{k_q}{c_q} + \frac{c_t}{c_q} - 1 \right) - \right. \\ \left. - Rt \cdot Rq \left[\frac{k}{c_s} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} - \frac{c_q}{c_t} \frac{1}{\text{Sc}} \right) + \frac{k_t}{c_t} \frac{k}{c_q} \right] \right\}$$

$$\Omega_8 = \Omega_7 \quad \Omega_{10} = \frac{\varphi}{\Psi} \left[\varphi + \frac{k}{c_s} \left(Rt \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} - Rq \frac{c_t}{c_q} \right) \right]$$

$$\Omega_{13} = \frac{1}{\Psi} \left\{ \varphi^{3/2} \left[\varphi + \frac{k}{c_s} \left(Rt \frac{c_q}{c_t} - Rq \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} \right) \right] \right\}$$

$$\Omega_{11} = \frac{\varphi}{(\varphi + Rt - Rq)(1 + Sc)\Psi} \left\{ \varphi^2(1 + Sc) - \varphi \cdot Rq \left[\frac{k_q}{c_q} + \frac{k}{c_s} \frac{Sc}{Pr} (1 + Sc) \right] + \right.$$

$$+ \varphi \cdot Rt \left(\frac{k_t}{c_s} + \frac{k_q}{c_t} + 1 - \frac{Sc}{Pr} + \frac{k}{c_s} \frac{c_q}{c_t} \right) + Rq^2 \frac{k}{c_s} \frac{k_q}{c_q} \frac{Sc}{Pr} + Rt^2 \frac{k}{c_s} \left(\frac{k_t}{c_t} + \frac{c_q}{c_t} - 1 \right) -$$

$$\left. - Rt \cdot Rq \left[\frac{k}{c_s} \left(\frac{Sc}{Pr} - \frac{c_t}{c_q} \frac{1}{Pr} \right) + \frac{k_q}{c_q} \frac{k}{c_t} \right] \right\}$$

$$\Omega_{12} = \Omega_{11} \quad \Omega_{14} = \frac{\varphi}{\Psi} \left[\varphi + \frac{k}{c_s} \left(Rt \frac{c_q}{c_t} - Rq \frac{Sc}{Pr} \right) \right]$$

$$\Omega_{15} = \frac{\varphi}{(Sc + Pr)\Psi} \left[\varphi \cdot (Sc + Pr) + Rt \frac{k}{c_s} Pr \left(\frac{c_q}{c_t} + 1 \right) - Rq \frac{k}{c_s} Sc \left(\frac{c_t}{c_q} + 1 \right) \right]$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \left[1 - Rt \left(\lambda_1 + \frac{k}{c_s} \frac{Pr}{Sc} \right) + Rq \left(\lambda_2 + \frac{k}{c_s} \frac{Sc}{Pr} \right) \right] + (\sqrt{\Phi} - \Theta)^{1/3} - (\sqrt{\Phi} + \Theta)^{1/3}$$

$$\Theta = \left(\frac{\omega}{3} \right)^3 - \frac{\omega \zeta}{6} + \frac{\phi}{2} \quad \Phi = \Theta^2 + \left(\frac{\zeta}{3} - \frac{\omega^2}{9} \right)^3$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) + \frac{k}{c_t} + 3 \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) + \frac{k}{c_q} + 3$$

$$\lambda_3 = \frac{k}{c_s} \frac{2}{3} \left(2 + \frac{k}{c} \right) \left(\frac{c_t}{c_q} + \frac{c_q}{c_t} \right) + \frac{k}{c_t} \frac{k}{c_q}$$

$$\omega = Rt \left(\lambda_1 + \frac{k}{c_s} \frac{Pr}{Sc} \right) - Rq \left(\lambda_2 + \frac{k}{c_s} \frac{Sc}{Pr} \right) - 1$$

$$\zeta = Rt^2 \left[\lambda_1 \left(\frac{k}{c_s} \frac{Pr}{Sc} + 1 \right) - 1 \right] + Rq^2 \left[\lambda_2 \left(\frac{k}{c_s} \frac{Sc}{Pr} + 1 \right) - 1 \right] -$$

$$- Rt \cdot Rq \cdot \left[\frac{k}{c_s} \left(\frac{Sc}{Pr} + \frac{Pr}{Sc} \right) - 2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \right] +$$

$$+ Rt \left(\frac{1}{Pr} - \frac{k}{c_s} \frac{Pr}{Sc} - \frac{k}{c_t} \right) - Rq \left(\frac{1}{Sc} - \frac{k}{c_s} \frac{Sc}{Pr} - \frac{k}{c_q} \right)$$

$$\phi = (Rt - Rq) \left\{ \left[Rt^2 \frac{k}{c_s} \frac{Pr}{Sc} (\lambda_1 - 1) + Rq^2 \frac{k}{c_s} \frac{Sc}{Pr} (\lambda_2 - 1) \right] - Rt \cdot Rq \cdot \lambda_3 \right\} +$$

$$+ Rt^2 \frac{k}{c_s} \frac{1}{Sc} \left(1 - \frac{k_t}{c_t} \right) + Rq^2 \frac{k}{c_s} \frac{1}{Pr} \left(1 - \frac{k_q}{c_q} \right) + Rt \cdot Rq \cdot \frac{k}{c_s} \left(\frac{k}{c_s} - \frac{c_t}{c_q} \frac{1}{Pr} - \frac{c_q}{c_t} \frac{1}{Sc} \right)$$

Rt, Rq - числа Ричардсона, зависящие от температуры и концентрации соответственно.

$$Rt = \frac{2}{3} \frac{\beta g \frac{\partial T}{\partial x_3}}{\text{Pr} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]}$$

$$Rq = \frac{2}{3} \frac{\alpha g \frac{\partial Q}{\partial x_3}}{Sc \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} \right)^2 \right]}$$

Pr , Sc - турбулентные числа Прандтля и Шмидта соответственно, которые зависят от физических свойств жидкости. Все константы c_q, c_t, c_s, k_t, k_q определяются через k и c .

$$k = \sqrt{\frac{c}{k} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \right]^{3/4}} \quad c = \left(\frac{c}{k} \right)^{3/2} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \right]^{3/4}$$

где $\frac{k}{c}$ не зависит от типов течения и определяется из теории изотропной турбулентности как коэффициент анизотропии и равно 7. Как уже обсуждалась в разделе 3.1, коэффициенты имеют следующие значения

$$Pr = \frac{k}{k_t} \cong 0,75 \quad Sc = \frac{k}{k_t} \cong 0,75 \quad \frac{c_t}{c_q} = 1 \quad c_s = c_t + c_q$$

Таким образом, полученные выражения позволяют замкнуть уравнения Рейнольдса для сложных течений атмосферы и океанологии, где в потоке одновременно присутствуют температура и концентрация, и рассчитать как основные, так и турбулентные пульсационные характеристики потока.